٣) نظريّة ذات الحدّين

$(أ + ب)^{ن} = أ^{ن} + (\binom{ن}{١}) ب^{١} أ^{ن-١} + (\binom{ن}{٢}) ب^{٢} أ^{ن-٢} + ... + (\binom{ن}{ن}) ب^{ن}$

$(أ - ب)^{ن} = أ^{ن} - (\binom{ن}{١}) ب^{١} أ^{ن-١} + (\binom{ن}{٢}) ب^{٢} أ^{ن-٢} + ... + (\binom{ن}{ن}) ب^{ن}$

حالة خاصة

$(١+س)^{ن} = ١ + (\binom{ن}{١}) س + (\binom{ن}{٢}) س^{٢} + (\binom{ن}{٣}) س^{٣} + ... + (\binom{ن}{ن}) س^{ن}$

$= ١ + (\binom{ن}{١}) س + (\binom{ن}{٢}) س^{٢} + (\binom{ن}{٣}) س^{٣} + ... + (\binom{ن}{ن}) س^{ن}$

****

مثال

أوجد مفكوك $(أ + ب)^{٥}$

(١) حسب قوى أ التنازلية (٢) حسب قوى أ التصاعدية

الحـــــــل

(١) حسب قوى أ التنازلية

$(أ + ب)^{٥} = (\binom{٥}{٠}) أ^{٥} + (\binom{٥}{١}) ب أ^{٤} + (\binom{٥}{٢}) ب^{٢} أ^{٣} + (\binom{٥}{٣}) ب^{٣} أ^{٢} + (\binom{٥}{٤}) ب^{٤} أ + (\binom{٥}{٥}) ب^{٥}$

$= أ^{٥} + ٥ ب أ^{٤} + ١٠ ب^{٢} أ^{٣} + ١٠ ب^{٣} أ^{٢} + ٥ ب^{٤} أ + ب^{٥}$

(٢) حسب قوى أ التصاعدية

$(ب + أ)^{٥} = (\binom{٥}{٠}) ب^{٥} + (\binom{٥}{١}) أ ب^{٤} + (\binom{٥}{٢}) أ^{٢} ب^{٣} + (\binom{٥}{٣}) أ^{٣} ب^{٢} + (\binom{٥}{٤}) أ^{٤} ب + (\binom{٥}{٥}) أ^{٥}$

$= ب^{٥} + ٥ أ ب^{٤} + ١٠ أ^{٢} ب^{٣} + ١٠ أ^{٣} ب^{٢} + ٥ أ^{٤} ب + أ^{٥}$

****

مثال

أوجد مفكوك $(١ + س)^{٧}$ حسب قوى س التصاعدية

الحـــــــل

$(١ + س)^{٧} = ١ + (\binom{٧}{١}) س + (\binom{٧}{٢}) س^{٢} + (\binom{٧}{٣}) س^{٣} + (\binom{٧}{٤}) س^{٤} + (\binom{٧}{٥}) س^{٥}$

$+ (\binom{٧}{٦}) س^{٦} + (\binom{٧}{٧}) س^{٧}$

$= ١ + ٧ س + ٢١ س^{٢} + ٣٥ س^{٣} + ٣٥ س^{٤} + ٢١ س^{٥} + ٧ س^{٦} + س^{٧}$

****

مثال

أوجد مفكوك $(س - ٢)^{٤}$ حسب قوى س التنازلية

$(س - ٢)^{٤} = س^{٤} + (\binom{٤}{١}) (-٢)^{١} س^{٣} + (\binom{٤}{٢}) (-٢)^{٢} س^{٢} + (\binom{٤}{٣}) (-٢)^{٣} س + (\binom{٤}{٤}) (-٢)^{٤}$

$= س^{٤} - ٨ س^{٣} + ٢٤ س^{٢} - ٣٢ س + ١٦$

مثال أوجد مفكوك (٢س – ٣ص)^{٣}

الحـــــــل

$(٢س- ٣ص)^{٣} = (٢س)^{٣} + \binom{٣}{١}(٢س)^{٢}(-٣ص)^{١} + \binom{٣}{٢}(٢س)^{١}(-٣ص)^{٢} + (-٣ص)^{٣}$

$= ٨س^{٣} - ٣٦ ص س^{٢} + ٥٤ ص^{٢} س - ٢٧ ص$

****

مثال أوجد $(٠,٩٨)^{٥}$ لاربعة أرقام عشرية

الحـــــــل

$(١ - ٠,٠٢)^{٥} = ١ + \binom{٥}{١}(-٠,٠٢)^{١} + \binom{٥}{٢}(-٠,٠٢)^{٢} + \binom{٥}{٣}(-٠,٠٢)^{٣} + ...$

$= ١ + ٥ \times -٠,٠٢ + ١٠ \times ٠,٠٠٠٤ + ١٠ \times -٠,٠٠٠٠٠٨$

$= ١ - ٠,١ + ٠,٠٠٤ - ٠,٠٠٠٠٠٨ = ٠,٩٠٣٩$

****

مثال أوجد $(١,٢)^{٥}$ لاقرب ثلاث أرقام عشرية

الحـــــــل

$(١ + ٠,٢)^{٥} = ١ + \binom{٥}{١}(٠,٢) + \binom{٥}{٢}(٠,٢)^{٢} + \binom{٥}{٣}(٠,٢)^{٣} + \binom{٥}{٤}(٠,٢)^{٤} + ...$

$= ١ + ٥ \times ٠,٢ + ١٠ \times ٠,٠٤ + ١٠ \times ٠,٠٠٨ + ٥ \times ٠,٠٠١٦$

$= ١ + ١ + ٠,٤ + ٠,٠٨ + ٠,٠٠٨ = ٢,٤٨٨$

****

تـــــــــــــدريب

(١) بأستخدام نظرية ذات الحدين أوجد قيمة

[أ] $(١٠١)^{٤}$ [١٠٤٠٦٠٤٠١]

[ب] $(١,٠٥)^{٣}$ [١,١٥٧٦٢٥]

[جـ] $(٠,٩٩)^{٦}$ لاقرب خمسة أرقام عشرية [٠,٩٤١٤٨]

(٢) أوجد مفكوك كلا من

[أ] $(أ + ب)^{٧}$

[ب] $(٢أ - ب)^{٥}$

[جـ] $(س + س^{-١})^{٦}$

[ء] $(١ + \frac{س}{٢})^{٥}$

[هـ] $(٣س - ٢)^{٥}$

[و] $(٢ - ٣س)^{٧}$

[س] $(١ + ٢أ)^{٥}$

[ص] $(٣س+١)^{٤}$

الحد العام فى مفكوك $(س + ص)^{ن}$ يعطى من العلاقة

$ح_{ر+١} = \binom{ن}{ر} (الثانى)^{ر} (الاول)^{ن-ر}$

$معامل\ ح_{ر+١} = \binom{ن}{ر} (معامل\ الثانى)^{ر} (معامل\ الاول)^{ن-ر}$

****

مثال أوجد الحد الخامس فى مفكوك $(٢س + ٣ص)^{١٠}$

الحـــــــل

$ح_{ر+١} = \binom{ن}{ر} (الثانى)^{ر} (الاول)^{ن-ر}$

$ح_{٨} = \binom{١٠}{٧} (٣ص)^{٧} (٢س)^{٣} = \binom{١٠}{٣} \times ٢١٨٧\ ص^{٧} \times ٨س^{٣}$

$= \frac{٨ \times ٩ \times ١٠}{١ \times ٢ \times ٣} \times ٢١٨٧ \times ٨\ ص^{٧}\ س^{٣} = ٢٠٩٩٥٢٠\ ص^{٧}\ س^{٣}$

مثال أوجد الحد الرابع من النهاية فى مفكوك (٣س – ٢ص)^{١٥}

الحـــــــل

لايجاد الحد الرابع من النهاية نقلب المفكوك ونوجد الحد الرابع من البداية

فيكون المفكوك (-٢ص +٣س)^{١٥}

$ح_{٤} = \binom{١٥}{٣} (٣س)^{٣}(-٢ص)^{١٢} \frac{١٣ \times ١٤ \times ١٥}{١ \times ٢ \times ٣}$ × ٢٧س^{٣} × ١٠٢٤ ص^{١٢}

= ١٢٥٧٩٨٤٠ س^{٣} ص^{١٢}

****

مثال أوجد معامل الحد الخامس فى مفكوك (٢س+٣ص)^{٦}

الحـــــــل

معامل ح$_{ر+١}$ = $\binom{ن}{ر}$ (معامل الثانى)^{ر}(معامل الاول)$^{ن-ر}$

معامل ح$_{٥} = \binom{٦}{٤}$ $(٣)^{٤}(٢)^{٢}$ = ١٥ × ٨١ × ٤ = ٤٨٦٠

الحد الاوسط فى مفكوك (أ + ب)^{ن}

١- إذا كانت ن (الاس) زوجيا فان عدد حدود المفكوك ن+١ (فرديا) ولهذا يوجد حد أوسط واحد رتبته $\frac{ن}{٢}$ +١

٢- إذا كانت ن(الاس) فرديا فان عدد الحدود ن+١ (زوجيا) ولهذا يوجد حدان أوسطان رتبتيهما $\frac{ن+١}{٢}$ ، $\frac{ن+٣}{٢}$

مثال أوجد الحد الاوسط فى مفكوك $(٣س + ٢)^{١٢}$

الحـــــــل

رتبة الحد الاوسط $= \frac{ن}{٢} + ١ = \frac{١٢}{٢} + ١ = ٦ + ١ = ٧$

$ح_{٧} = \binom{١٢}{٦} (٢)^{٦} (٣س)^{٦} = ٩٢٤ \times ٦٤ \times ٧٢٩ س^{٦} =$

****

مثال أوجد الحدان الاوسطان فى مفكوك $(٢س+٣)^{٩}$

الحـــــــل

الحدان الاوسطان هما $ح_{٥}$ ، $ح_{٦}$

$ح_{٥} = \binom{٩}{٤} (٣)^{٤} (٢س)^{٥} = ١٢٦ \times ٨١ \times ٣٢ س^{٥} = ٣٢٦٥٩٢ س^{٥}$

$ح_{٦} = \binom{٩}{٥} (٣)^{٥} (٢س)^{٤} = ١٢٦ \times ٢٤٣ \times ١٦ س^{٤} = ٤٨٩٨٨٨ س^{٤}$

****

مثال إذا كان الحدان الاوسطان فى مفكوك $(٥س+ ٤ص)^{٧}$ متساويان إثبت أن $س = \frac{٤}{٥} ص$

الحـــــــل

$ح_{٤} = ح_{٥}$

$\binom{٧}{٣} (٤ص)^{٣} (٥س)^{٤} = \binom{٧}{٤} (٤ص)^{٤} (٥س)^{٣}$

$٥س = ٤ص$

$س = \frac{٤}{٥} ص$

مثال إذا كان الحد الرابع والاوسط فى مفكوك (٣أ +٢ب)^{٨} متساويان إثبت أن
أ : ب = ٥ : ٦

الحـــــــل

الحد الاوسط هو ح$_{٥}$

ح$_{٤}$ = ح$_{٥}$

$$\binom{٨}{٣}(٢ب)^{٣}(٣أ)^{٥} = \binom{٨}{٤}(٢ب)^{٤}(٣أ)^{٤}$$

$$\frac{٨\times٧\times٦}{١\times٢\times٣}\times ٣أ = \frac{٨\times٧\times٦\times٥}{١\times٢\times٣\times٤}\times ٢ب$$

$$٣أ = \frac{٥ب}{٢}$$

$$٦أ = ٥ب \qquad \frac{أ}{ب} = \frac{٥}{٦}$$

****

مثال إذا كان معاملا الحدين الرابع والسادس من مفكوك (١ + س)^{ن} هما٣٥ ، ٢١ على الترتيب فما قيمة ن

الحـــــــل

معامل ح$_{٤}$ = $\binom{ن}{٣}$ = ٣٥

$$\frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{١\times٢\times٣} = ٣٥$$

$$ن(ن-١)(ن-٢) = ٢١٠$$

معامل ح$_{٦}$ = $\binom{ن}{٥}$ = ٢١

$$\frac{ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)(ن-٤)}{١\times٢\times٣\times٤\times٥} = ٢١$$

$$ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)(ن-٤) = ٢٥٢٠$$

$$\frac{ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)(ن-٤)}{ن(ن-١)(ن-٢)} = \frac{٢٥٢٠}{٢١٠}$$

$$(ن-٣)(ن-٤) = ١٢$$

$$ن^{٢} - ٧ن + ١٢ = ١٢$$

$$ن^{٢} - ٧ن = ٠$$

$$ن(ن-٧) = ٠$$

$$ن = ٧$$

معامل أى قوة والحد الخالى من س

مثال أوجد معامل $س^{١٥}$ والحد الخالى من س فى مفكوك $(س^{٣} + \frac{٣}{س^{٢}})^{١٠}$

الحـــــل

$ح_{ر+١} = \binom{١٠}{ر} (\frac{٣}{س^{٢}})^{ر} (س^{٣})^{١٠-ر} = \binom{١٠}{ر} ٣^{ر} س^{-٢ر} \times س^{٣٠-٣ر}$

$= \binom{١٠}{ر} ٣^{ر} \times س^{٣٠-٥ر}$

لايجاد الحد المشتمل على $س^{٥}$ نضع

$س^{٣٠-٥ر} = س^{١٥}$

$٣٠ - ٥ر = ١٥$

$-٥ر = ١٥ - ٣٠ = -١٥$

$ر = ٣$

الحد المشتمل على $س^{١٥}$ هو $ح_{٤}$

معامل $ح_{٤} = \binom{١٠}{٣} \times ٣^{٣} = ٣٢٤٠$

لايجاد الحد الخالى من س نضع

$س^{٣٠-٥ر} = س^{٠}$

$٣٠ - ٥ر = ٠$

$٥ر = ٣٠$

$ر = ٦$

الحد الخالى من س هو $ح_{٧}$

$ح_{٧} = \binom{١٠}{٦} \times ٣^{٦} = ١٥٣٠٩٠$

****

مثال فى مفكوك $(س^{٢} + \frac{أ}{س})^{٥}$ أذا كان معامل س يساوى ٨٠ فما قيمة أ

الحـــــل

$ح_{ر+١} = \binom{٥}{ر} (\frac{أ}{س})^{ر} (س^{٢})^{٥-ر} = \binom{٥}{ر} أ^{ر} س^{-ر} \times س^{١٠-٢ر}$

$= \binom{٥}{ر} أ^{ر} \times س^{١٠-٣ر}$

لايجاد الحد المشتمل على س نضع

$س^{١٠-٣ر} = س$

$١٠ - ٣ر = ١$

$٣ر = ٩$

$ر = ٣$

الحد المشتمل على س هو $ح_{٤}$

معامل $ح_{٤} = ٨٠$

$\binom{٥}{٣} أ^{٣} = ٨٠$

$١٠ أ^{٣} = ٨٠$

$أ^{٣} = ٨$

$أ = ٢$

مثال إثبت أنه لا يوجد حد خالى من س فى مفكوك $(\frac{س}{٣} + \frac{٣}{س})^{١١}$

الحـــــــل

$ح_{ر+١} = \binom{١١}{ر} (\frac{٣}{س})^{ر} (\frac{س}{٣})^{١١-ر} = \binom{١١}{ر} \times ٣^{ر} \times س^{-ر} \times س^{١١-ر} \times ٣^{-١١+ر}$

$= \binom{١١}{ر} \times ٣^{٢ر-١١} \times س^{١١-٢ر}$

نضع $س^{١١-٢ر} = س^{صفر}$

$١١ - ٢ر = ٠$

$٢ر = ١١$ $\quad ر = \frac{١١}{٢}$ (مرفوض)

لا يوجد حد خال من س فى هذا المفكوك

****

مثال إثبت أنه لا يوجد حد يحتوى على $س^{٨}$ فى مفكوك $(س^{٢} - \frac{٤}{س})^{١٤}$

الحـــــــل

$ح_{ر+١} = \binom{١٤}{ر} (\frac{-٤}{س})^{ر} (س^{٢})^{١٤-ر} = \binom{١٤}{ر} \times (-٤)^{ر} \times س^{-ر} \times س^{٢٨-٢ر}$

$= \binom{١٤}{ر} \times (-٤)^{ر} \times س^{٢٨-٣ر}$

نضع $س^{٢٨-٣ر} = س^{٨}$

$٢٨ - ٣ر = ٨$

$٣ر = ٢٠$ $\quad ر = \frac{٢٠}{٣}$ (مرفوض)

لا يوجد حد يحتوى على $س^{٨}$ فى هذا المفكوك

مثال فى مفكوك $(س + \frac{١}{س})^{ن}$ إذا كان الحد الخالى من س هو $ح_{ه}$ أوجد ن

الحـــــــل

$ح_{ر+١} = \binom{ن}{ر} (\frac{١}{س})^{ر} \times س^{ن-ر} = \binom{ن}{ر} س^{-ر} \times س^{ن-ر} = \binom{ن}{ر} \times س^{ن-٢ر}$

الحد الخالى من س هو $ح_{ه}$

$ر = ٤$

$ن - ٢ر = ٠$

$ن - ٢ \times ٤ = ٠$

$ن - ٨ = ٠$

$ن = ٨$

مثال

إذا كانت ن عددا صحيحا موجبا فأثبت أنه لا يوجد حد خال من س فى مفكوك $(س^{٥} + \frac{١}{س^{٢}})^{ن}$ إلا إذا كانت ن = ٧ أو مكررا لها ثم أوجد رتبة وقيمة الحد الخالى من س عندما تكون ن = ١٤

الحـــــــل

$ح_{ر+١} = \binom{ن}{ر}(\frac{١}{س^{٢}})^{ر}(س^{٥})^{ن-ر} = \binom{ن}{ر} س^{-٢ر} \times س^{٥ن-٥ر} = \binom{ن}{ر} س^{٥ن-٧ر}$

لايجاد رتبة الحد الخالى من س نضع

$س^{٥ن-٧ر} = س^{٠}$

$٥ن - ٧ر = ٠$

$٧ر = ٥ن$

$ر = \frac{٥ن}{٧}$

لكى يوجد حدّ خال من س لابد من أن تكون ر عدد صحيح موجب وهذا لا يتحقق إلا إذا كانت ن = ٧ أو مكررا لها

عندما ن = ١٤

$ر = \frac{٥ \times ١٤}{٧} = ١٠$

رتبة الحد الخالى من س هو $ح_{١١}$

$ح_{١١} = {}^{١٤}ق_{١٠} = {}^{١٤}ق_{٤} = ١٠٠١$

مثال

فى مفكوك $(٢س + \frac{٣}{٢س^{٣}})^{١٢}$ أوجد معامل $\frac{١}{س^{٤}}$

الحـــــــل

$ح_{ر+١} = \binom{١٢}{ر}(\frac{٣}{٢س^{٣}})^{ر}(٢س)^{١٢-ر} = \binom{١٢}{ر}(\frac{٣}{٢})^{ر} \times س^{-٣ر} \times ٢^{١٢-ر} \times س^{١٢-ر}$

$= \binom{١٢}{ر}(\frac{٣}{٢})^{ر} \times ٢^{١٢-ر} \times س^{١٢-٤ر}$

لا يجاد الحد المشتمل على $س^{-٤}$

$س^{١٢-٤ر} = س^{-٤}$ $١٢ - ٤ر = -٤$ $-٤ر = -١٦$ $ر = ٤$

معامل $ح_{٥} = \binom{١٢}{٤}(\frac{٣}{٢})^{٤} \times ٢^{٨} =$

النسبة بين حدين متتاليين فى مفكوك (س + ص)^{ن}

$$\frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{ن - ر + ١}{ر} \times \frac{\text{الثانى}}{\text{الاول}} \text{ ،،،}$$

$$\frac{\text{معامل } ح_{ر+١}}{\text{معامل } ح_{ر}} = \frac{ن - ر + ١}{ر} \times \frac{\text{معامل الثانى}}{\text{معامل الاول}}$$

مثال فى مفكوك (٢ س + ٣ص)^{١٢} أوجد

(١) $\frac{ح_{٦}}{ح_{٥}}$ (٢) $\frac{ح_{٦}}{ح_{٧}}$ (٣) $\frac{ح_{٧}}{ح_{٥}}$ (٤) $\frac{\text{معامل } ح_{٥}}{\text{معامل } ح_{٤}}$

الحـــــل

$$\frac{ح_{٦}}{ح_{٥}} = \frac{١٢ - ٥ + ١}{٥} \times \frac{٣ص}{٢س} = \frac{٨}{٥} \times \frac{٣ص}{٢س} = \frac{١٢ص}{٥س}$$

$$\frac{ح_{٦}}{ح_{٧}} = \frac{٦}{١٢ - ٦ + ١} \times \frac{٢س}{٣ص} = \frac{٦}{٧} \times \frac{٢س}{٣ص} = \frac{٤س}{٧ص}$$

$$\frac{ح_{٧}}{ح_{٥}} = \frac{ح_{٧}}{ح_{٦}} \times \frac{ح_{٦}}{ح_{٥}} = \frac{١٢ - ٦ + ١}{٦} \times \frac{٣ص}{٢س} \times \frac{١٢ - ٥ + ١}{٥} \times \frac{٣ص}{٢س}$$

$$= \frac{٧}{٦} \times \frac{٨}{٥} \times \frac{٩ص^{٢}}{٤س^{٢}} = \frac{٢١ص^{٢}}{٥س^{٢}}$$

$$\frac{\text{معامل } ح_{٥}}{\text{معامل } ح_{٤}} = \frac{١٢ - ٤ + ١}{٤} \times \frac{٣}{٢} = \frac{٩}{٤} \times \frac{٣}{٢} = \frac{٢٧}{٨}$$

مثال إذا كانت النسبة بين الحدين الرابع والخامس من مفكوك (٥ – ٣س)^{٨} تساوى -٢ : ٣ أوجد قيمة س

الحـــــــل

$\frac{ح_٥}{ح_٤} = \frac{-٣}{٢}$

$\frac{\frac{٤}{٨} \times ح}{\frac{١+٤-٤}{٤}} \times \frac{-٣س}{٥} = \frac{-٣}{٢}$

$\frac{-٣س}{٤} = \frac{-٣}{٢}$

-٦ س = - ١٢

س = ٢

مثال فى مفكوك (١ + س)^{ن} إذا كانت النسبة بين معاملات ثلاث حدود متتالية كنسبة ١٥ : ٤٢ : ٩١ على الترتيب فما قيمة ن وما ترتيب هذه الحدود

الحـــــــل

نفرض أن هذه الحدود ح$_{ر}$ ، ح$_{ر+١}$ ، ح$_{ر+٢}$

$\frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{٤٢}{١٥} \Leftarrow \frac{ن-ر+١}{ر} = \frac{١٤}{٥}$

٥ن – ٥ ر +٥ = ١٤ر

٥ن – ١٩ ر = -٥ (١)

$\frac{ح_{ر+٢}}{ح_{ر+١}} = \frac{٩١}{٤٢}$ $\frac{ن-(ر+١)+١}{ر+١} = \frac{٩١}{٤٢}$

$\frac{ن-ر}{ر+١} = \frac{١٣}{٦}$

٦ن – ٦ ر = ١٣ر +١٣

٦ن – ١٩ ر = ١٣

بحل المعادلتين معا

٦ن – ١٩ ر = ١٣

٥ن – ١٩ ر = -٥

ن = ١٨

٦ × ١٨ – ١٩ ر = ١٣

١٠٨ – ١٩ ر = ١٣

-١٩ ر = ١٣ – ١٠٨

- ١٩ ر = - ٩٥ ر = ٥

الحدود هى ح٥ ، ح٦ ، ح٧

مثال

فى مفكوك (٤ + ٧ س)^{١٤} أذا النسبة بين الحد الاوسط والحد السابع٢: ٣
إوجد قيمة س

الحـــــــل

الحد الاوسط ح$_{٨}$

$$\frac{ح_{٨}}{ح_{٧}} = \frac{٢}{٣}$$

$$\frac{٢}{٣} = \frac{س٧}{٤} \times \frac{١+٧-١٤}{٧}$$

$$\frac{٢}{٣} = \frac{س٨}{٤}$$

٢٤س = ٨

$$س = \frac{٨}{٢٤} = \frac{١}{٣}$$

مثال

فى مفكوك (١ + س)^{٧} إذا كان ٢ معامل ح$_{ر+١}$ = معامل ح$_{ر}$ + معامل ح$_{ر+٢}$
إجد قيمة ر

الحـــــــل

٢ معامل ح$_{ر+١}$ = معامل ح$_{ر}$ + معامل ح$_{ر+٢}$

$$٢ = \frac{\text{معامل ح}_{ر}}{\text{معامل ح}_{ر+١}} + \frac{\text{معامل ح}_{ر+٢}}{\text{معامل ح}_{ر+١}} \div$$

$$٢ = \frac{ر}{١+ر-٧} + \frac{(١+ر)-٧}{١+ر+١}$$

$$٢ = \frac{ر}{ر-٨} + \frac{ر-٧}{ر+١}$$

$$٢ = \frac{ر^{٢}+ر+٥٦-١٥ر+ر^{٢}}{ر-ر^{٢}-٨+٨ر}$$

$$٢ = \frac{٢ر^{٢}-١٤ر+٥٦}{-ر^{٢}+٧ر+٨}$$

$$٢ر^{٢}-١٤ر+٥٦ = -٢ر^{٢}+١٤ر+١٦$$

$$٤ر^{٢}-٢٨ر+٤٠ = ٠$$

$$ر^{٢}-٧ر+١٠ = ٠$$

$$(ر-٢)(ر-٥) = ٠$$

ر = ٢ ر = ٥

مثال النسبة بين معاملى أحد الحدود والحد التالى له مباشرة فى مفكوك $(٥+٤س)^{٢٤}$ تساوى ٥ : ٦ أوجد رتبة كلا منهما

الحـــــل

نفرض الحدان هما $ح_ر$ ، $ح_{ر+١}$

$$\frac{ح_{ر+١}}{ح_ر} = \frac{٦}{٥}$$

$$\frac{٢٤-ر+١}{ر} \times \frac{٤}{٥} = \frac{٦}{٥}$$

$$\frac{٢٥-ر}{ر} \times \frac{٦}{٥} = \frac{٥}{٤}$$

$$\frac{٢٥-ر}{ر} = \frac{٦}{٤}$$

$$٦ر = ١٠٠ - ٤ر$$

$$٦ر + ٤ر = ١٠٠$$

$$١٠ر = ١٠٠$$

$$ر = ١٠$$

الحدان هما $ح_{١٠}$ ، $ح_{١١}$

مثال فى مفكوك $(١ + س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية وجد أن معامل $س^{٤}$ = معامل $س^{٣}$ + ٢ معامل $س^{٢}$ فما قيمة ن

الحـــــل

$$(١ + س)^{ن} = ١ + ن ق_{١} س + ن ق_{٢} س^{٢} + ن ق_{٣} س^{٣} + ...$$

معامل $س^{٤} = ن ق_{٤}$ ، معامل $س^{٣} = ن ق_{٣}$ ،معامل $س^{٢} = ن ق_{٢}$

$ن ق_{٤} = ن ق_{٣} + ٢ ن ق_{٢} \div ن ق_{٣}$

$$\frac{ن ق_{٤}}{ن ق_{٣}} = \frac{ن ق_{٢}}{ن ق_{٣}} \times ٢ + ١$$

$$\frac{ن-٣}{٤} = \frac{٣}{ن-٢} \times ٢ + ١$$

$$\frac{ن-٣}{٤} = \frac{٦}{ن-٢} + ١$$

$$\frac{ن-٣}{٤} = \frac{ن-٢+٦}{ن-٢}$$

$$(ن-٣)(ن-٢) = ٤ن - ٨ + ٢٤$$

$$ن^{٢} - ٥ن + ٦ - ٤ن - ١٦ = ٠$$

$$ن^{٢} - ٩ن - ١٠ = ٠$$

$$(ن-١٠)(ن+١) = ٠$$

$$ن = ١٠ \quad ن = -١ \text{ (مرفوض)}$$

مثال

فى مفكوك $(س + ص)^{٨}$ إذا كان $ح_{١} + ح_{٣} = ٢ ح_{٢}$ أوجد س : ص

الحـــــل

$ح_{١} + ح_{٣} = ٢ ح_{٢}$ ÷ $ح_{٢}$

$$\frac{ح_{١}}{ح_{٢}} + \frac{ح_{٣}}{ح_{٢}} = ٢$$

$$\frac{١}{٨ - ١ + ١} \times \frac{س}{ص} + \frac{٨ - ٢ + ١}{٢} \times \frac{ص}{س} = ٢$$

$$\frac{س}{٨ص} + \frac{٧ص}{٢س} = ٢$$

$$\frac{٢س^{٢} + ٥٦ ص^{٢}}{١٦ س ص} = ٢$$

$٢س^{٢} + ٥٦ ص^{٢} = ٣٢ س ص$

$٢س^{٢} - ٣٢ س ص + ٥٦ ص^{٢} = ٠$

$س^{٢} - ١٦ س ص + ٢٨ ص = ٠$

$(س - ٢ص)(س - ١٤ ص) = ٠$

$س = ٢ ص$ ،، $س = ١٤ ص$

$$\frac{س}{ص} = ٢$$

$$\frac{س}{ص} = ١٤$$

مثال

إذا كانت الحدود الثانى والثالث والرابع فى مفكوك $(س + ص)^{ن}$ هى على الترتيب ٥٠ ، ١١٢٥ ، ١٥٠٠٠ أوجد قيمة س ، ص ، ن

الحـــــل

$$\frac{ح_{٣}}{ح_{٢}} = \frac{١٢٢٥}{٥٠}$$

$$\frac{ن - ٢ + ١}{٢} \times \frac{ص}{س} = \frac{٤٥}{٢}$$

$$(ن - ١) \frac{ص}{س} = ٤٥$$

$(ن - ١) ص = ٤٥ س$ (١)

$$\frac{ح_{٤}}{ح_{٣}} = \frac{١٥٠٠٠}{١١٢٥}$$

$$\frac{ن - ٣ + ١}{٣} \times \frac{ص}{س} = \frac{٤٠}{٣}$$

$$(ن - ٢) \frac{ص}{س} = ٤٠$$

$(ن - ٢) ص = ٤٠ س$ (٢)

بالقسمة

$$\frac{(ن - ٢) ص}{(ن - ١) ص} = \frac{٤٠ س}{٤٥ س}$$

$$\frac{ن - ٢}{ن - ١} = \frac{٨}{٩}$$

$٩ ن - ١٨ = ٨ ن - ٨$

$٩ن - ٨ ن = - ٨ + ١٨$

$ن = ١٠$

بالتعويض فى ١ $٩ص = ٤٥ س$ $ص = ٥س$

$ح_{٢} = ٥٠$ $ق_{١}^{١٠} ص س^{٩} = ٥٠$

$١٠ \times ٥س \times س^{٩} = ٥٠$

$س^{١٠} = ١$ $س = \pm ١$ $ص = \pm ٥$

مثال

فى مفكوك $(أ + ب)^{٢٠}$ حسب قوى أ التنازلية إذا كان $(ح_{ر+١})^{٢} = \frac{٥}{٤} ح_{ر} \times ح_{ر+٢}$ أوجد قيمة ر

الحـــــــل

$ح_{ر+١} \times ح_{ر+١} = \frac{٥}{٤} ح_{ر} \times ح_{ر+٢}$

$\frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{٥}{٤} \times \frac{ح_{ر+٢}}{ح_{ر+١}}$

$\frac{ب}{أ} \times \frac{٥}{٤} \times \frac{١+(ر+١)-٢٠}{ر+١} = \frac{ب}{أ} \times \frac{١+ر-٢٠}{ر}$

$\frac{ر-٢١}{ر} = \frac{٥}{٤} \times \frac{ر-٢٠}{ر+١}$

$\frac{ر-٢١}{ر} = \frac{١٠٠-٥ر}{٤ر+٤}$

ر $(١٠٠ - ٥ ر) = (٢١- ر)(٤ر+٤)$

$١٠٠ر - ٥ر^{٢} = ٨٤ر + ٨٤ - ٤ر^{٢} - ٤ر$

$ر^{٢} - ٢٠ ر + ٨٤ = ٠$

$(ر - ٦)(ر - ١٤) = ٠$

ر = ٦ ر = ١٤

مثال

أوجد مفكوك

$(أ - ب)^{٥}$

الحـــــــل

(١) حسب قوى أ التنازلية

$(أ - ب)^{٥} = (^{٥}_{٠}) أ^{٥} - (^{٥}_{١}) ب أ^{٤} + (^{٥}_{٢}) ب^{٢} أ^{٣} - (^{٥}_{٣}) ب^{٣} أ^{٢} + (^{٥}_{٤}) ب^{٤} أ - (^{٥}_{٥}) ب^{٥} أ^{٠}$

$= أ^{٥} - ٥ ب أ^{٤} + ١٠ ب^{٢} أ^{٣} - ١٠ ب^{٣} أ^{٢} + ٥ ب^{٤} أ - ب^{٥}$

أسئلة مراجعة

أوجد مفكوك كل من المعادلات التالية:

$(٣ س + \frac{١}{س})^{٤}$

الحـــــــل

$(\frac{٢}{س} + ٢ س)^{٦}$

الحـــــــل

$(٣س - ٢ص)^{٤}$

الحـــــــل

$(س^{٢} + ١)^{٥}$

الحـــــــل

$(\frac{١}{س} + س)^{٦}$

الحـــــــل